# Τα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών

Στην προηγούμενη μας παρουσίαση αναφερθήκαμε γενικά στην επιστήμη των μαθηματικών, στους μεγάλους ευεργέτες τους και στην πορεία τους μέσα στους αιώνες. Αυτή τη φορά , λοιπόν, επιλέξαμε να ασχοληθούμε με τα << άλυτα προβλήματα >> των μαθηματικών.

## 1. Τριχοτόμηση γωνίας

Ουσιαστικά το πρόβλημα έγκειται στην τριχοτόμηση οξείας γωνίας, η οποία είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί μόνο με κανόνα και διαβήτη γιατί η εξίσωση που την εκφράζει είναι τρίτου βαθμού χωρίς να μπορεί να αναχθεί σε δευτέρου.

Οι γνωστότεροι αρχαίοι γεωμέτρες που ασχοληθήκανε με το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας είναι:

* Ο Ιππίας ο Ηλείος
* Ο Αρχιμήδης
* Ο Νικομήδης
* Ο Πάππος ο Αλεξανδρινός

### Ο Ιππίας ο Ηλείος (περίπου 430 π.Χ.)

Το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας ήταν η της πρώτης καμπύλης στην ελληνική γεωμετρία, της τετραγωνίζουσας με τη βοήθεια της οποίας έδωσε και τη πρώτη λύση του προβλήματος.

### Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.)

Ο  Αρχιμήδης έδωσε δύο λύσεις στο πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας. Στη δεύτερη, μάλιστα, λύση χρησιμοποίησε την έλικα.

### Ο Νικομήδης (περίπου 200 π.Χ.)

Ο Νικομήδης για να λύσει το πρόβλημα επινόησε  μια καμπύλη, την  κογχοειδή.

### Ο Πάππος ο Αλεξανδρινός (3ος αι. μ.Χ.)

Ο Πάππος  στο έργο του "Μαθηματική συναγωγή" έδωσε  δύο λύσεις στο πρόβλημα της τριχοτόμησης μιας γωνίας.

## 2. Εξισώσεις Νέιβερ-Στόουκς

Οι εξισώσεις Navier-Stokes είναι διαφορικές εξισώσεις, που περιγράφουν την κίνηση των ρευστών. Συμβάλλουν στην εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα αλλά εφαρμόζονται και σε μοντέλα καιρού ή μοντέλα ωκεάνιων ρευμάτων.
Σε αντίθεση δηλαδή με τις αλγεβρικές εξισώσεις δεν μας δείχνουν εκπεφρασμένα μια σχέση μεταξύ των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν αλλά περιγράφουν σχέσεις μεταξύ των ρυθμών μεταβολής ή μεταξύ των ροών των διαφόρων μεγεθών. Με όρους μαθηματικούς λέμε ότι οι εξισώσεις αυτές περιέχουν σχέσεις μεταξύ των παραγώγων των διαφόρων μεγεθών. Πράγματι, έχει αναπτυχθεί μια ποικιλία υπολογιστικών προγραμμάτων που χρησιμοποιούν αριθμητικές μεθόδους για τη λύση των εξισώσεων Navier-Stokes. Η προσέγγιση αυτή της αντιμετώπισης του ζητήματος είναι γνωστή ως Υπολογιστική Δυναμική των Ρευστών.

## 3. Τα προβλήματα του Χίλμπερτ

Τα Προβλήματα του Χίλμπερτ αποτελούν μια λίστα από είκοσι τρία (23) προβλήματα στα [μαθηματικά](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC), που έχουν μεγάλη κύμανση τόσο σε θεματολογία όσο και σε ακρίβεια διατύπωσης. Μερικά από αυτά είναι διατυπωμένα με τόση ακρίβεια ώστε είναι δυνατόν να απαντηθούν με μια θετική ή αρνητική απάντηση όσων αφορά την ισχύ τους,ωστόσο μερικές φορές οι διατυπώσεις του Χίλμπερτ δεν ήταν αρκετά ακριβείς.

Υπάρχουν δύο προβλήματα τα οποία δεν είναι απλώς άλυτα, αλλά ίσως να είναι γενικώς μη επιλύσιμα με τις τωρινές μαθηματικές γνώσεις. Το 6ο πρόβλημα αφορά την αξιωματοποίηση της φυσικής.Επίσης, το 4ο πρόβλημα που αφορά τα θεμέλια της γεωμετρίας, διατυπώνεται με ένα τρόπο ο οποίος χαρακτηρίζεται ως ασαφής στο να επιτρέψει μια συγκεκριμένη απάντηση.

Αξιοσημείωτο είναι ότι, τα υπόλοιπα είκοσι ένα προβλήματα προσέλκυσαν μεγάλη προσοχή, και μέχρι και τον εικοστό πρώτο αιώνα θεωρούνται προβλήματα μεγάλης σημασίας.

Το 24ο πρόβλημα

Ο Χίλμπερτ αρχικά συμπεριέλαβε 24 προβλήματα στη λίστα του, αλλά αργότερα αποφάσισε να μην δημοσιεύσει το ένα από αυτά. Και έτσι αυτό ανακαλύφθηκε στα προσωπικά χειρόγραφα του Χίλμπερτ από τον Γερμανό [Ρουίντιγκερ Θίλε](http://el.wikipedia.org/w/index.php?title=%CE%A1%CE%BF%CF%85%CE%AF%CE%BD%CF%84%CE%B9%CE%B3%CE%BA%CE%B5%CF%81_%CE%98%CE%AF%CE%BB%CE%B5&action=edit&redlink=1) το 2000.

## 4. Δήλιο Πρόβλημα

Ο όρος “Δήλιο πρόβλημα” είναι ταυτόσημος με το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, που από την αρχαιότητα μέχρι και τον 19o αιώνα απασχόλησε άπαντες τους μαθηματικούς και όχι μόνο. ΄Έγινε αντικείμενο ιδιαίτερης μελέτης και τελικά χαρακτηρίστηκε ως άλυτο, αφού η λύση του με την χρήση αποκλειστικά του κανόνα και του διαβήτη είναι αδύνατη. Ο όρος “Δήλιο πρόβλημα” οφείλεται στο χρησμό, που δόθηκε στους Δηλίους κατά τη διάρκεια λοιμού, περίπου το 430 π.Χ., ο οποίος συμβούλευε να κατασκευάσουν ένα κυβικό βωμό διπλάσιου μεγέθους από τον ήδη υπάρχοντα. Οι Δήλιοι αναγκάστηκαν να συμβουλευτούν ακόμα και τον Πλάτωνα για να δώσουν λύση στο πρόβλημα. Ο πρώτος γεωμέτρης ο οποίος ασχολήθηκε με το πρόβλημα, είναι ο Ιπποκράτης ο Χίος. Για την προέλευση του προβλήματος υπάρχουν δύο σημαντικές μαρτυρίες. Η πρώτη προέρχεται από τον Ευτόκιο. Η δεύτερη μαρτυρία, προέρχεται από το Θέωνα το Σμυρναίο και βασίζεται σε ένα χαμένο διάλογο με τίτλο Πλατωνικός .

## 5. Θεωρήματα μη πληρότητας

Τα θεωρήματα μη πληρότητας του Γκέντελ, τα οποία αποδείχτηκαν από τον Κουρτ Γκέντελ το 1931, είναι δύο θεωρήματα που υποδεικνύουν έμφυτους περιορισμούς σε όλα τα (πλην των τετριμμένων) τυπικά συστήματα των μαθηματικών. Τα θεωρήματα είναι πολύ σημαντικά για τη φιλοσοφία των μαθηματικών.

Το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας του Γκέντελ δηλώνει ότι:

‘Οποιαδήποτε αποτελεσματικά παραχθείσα θεωρία που είναι ικανή να εκφράσει τη στοιχειώδη αριθμητική δεν μπορεί να είναι και συνεπής και πλήρης.

Το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας Γκέντελ μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

‘Για κάθε αποτελεσματικά παραχθείσα τυπική θεωρία Θ που συμπεριλαμβάνει βασικές αριθμητικές αλήθειες και επίσης συγκεκριμένες αλήθειες για την δυνατότητα τυπικής απόδειξης, η Θ συμπεριλαμβάνει δήλωση περί της ιδίας συνέπειας αν και μόνο αν η Θ είναι ασυνεπής.’

Στην ουσία τα θεωρήματα της μη πληρότητας συνδέονται με τα άλυτα προβλήματα καθώς μας λένε πως για οποιοδήποτε πρόβλημα, άλυτο ή μη, δε μπορούμε να γνωρίζουμε εξ αρχής εάν έχει ή δεν έχει λύση, κάτι που μπορεί να κάνει κόπους αιώνων εντελώς άσκοπους.

## 6. PvNP

To P versus NP είναι ένα βασικό άλυτο πρόβλημα στην επιστήμη των υπολογιστών. Γενικά είναι το κατά πόσο είναι δυνατό στο χρόνο που κάνει να ελεγχθεί ένα πρόβλημα, στον ίδιο ακριβώς χρόνο να επιλυθεί. Πρωτοαναφέρθηκε το 1956. Ο Γκέντελ ρώτησε αν ένα ορισμένο πλήρες NP πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί σε τετραγωνικό ή γραμμικό χρόνο. Η ακριβής δήλωση του Ρ εναντίον NP πρόβλημα εισήχθη το 1971 από τον Stephen Cook στην θεμελιώδη εργασία του «Η πολυπλοκότητα του θεωρήματος αποδεικτικές διαδικασίες» και θεωρείται από πολλούς ως το πιο σημαντικό ανοικτό πρόβλημα στον τομέα αυτό.

## 7. Υπόθεση Ρίμαν

Η "Υπόθεση Ρίμαν" αποτελεί το "το μεγαλύτερο άλυτο μαθηματικό πρόβλημα". Η υπόθεση αυτή συσχετίζεται με ένα συναρπαστικό γεγονός των πρώτων αριθμών και πώς συνδέεται με άλλους τομείς των μαθηματικών και της φυσικής. Οι πρώτοι αριθμοί είναι η καρδιά της ιστορίας και μπορούν να γίνουν εύκολα αντιληπτοί. Καθώς μετράμε από το 1 και προς τα πάνω, οι πρώτοι αριθμοί - που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και το 1 διαρκώς μειώνονται, χωρίς όμως να εξαφανίζονται εξ' ολοκλήρου. Μεταξύ του 1 και του 100 υπάρχουν 25, μεταξύ του 901 και του 1000 μόνο 14 και στο τελευταίο 100 πριν από το ένα τρισεκατομμύριο, μόνο 4.

## 8. Ζυλ Ανρί Πουανκαρέ

Το 1889 ο Πουανκαρέ έδειξε ότι η πλήρης ανάλυση της κίνησης έστω και τριών σωμάτων (π.χ. του Ήλιου, της Γης και της Σελήνης) με βάση τη νευτώνεια θεωρία παρήγαγε ένα ενδογενώς μη ολοκληρώσιμο σύστημα. Ως εκ τούτου θεμελίωσε τη σημαντική δυσκολία επίλυσης των προβλημάτων της φυσικής με μαθηματική ανάλυση, ακόμα και για τρία σώματα (πολύ περισσότερο για πάνω από τρία ή για εκατομμύρια) και ανέδειξε τις πρώτες ρωγμές στο Νευτώνειο σύμπαν.

## 9. Τετραγωνισμός Κύκλου

## Ο Τετραγωνισμός του κύκλου είναι ένα από τα αρχαιότερα γεωμετρικά προβλήματα. Η διατύπωση του είναι απλή: Ζητείται η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με το εμβαδόν ενός δοθέντος κύκλου. Το 1882, ο μαθηματικός Φέρντιναντ Φον Λίντεμαν απέδειξε το αδύνατο της επίλυσης του προβλήματος. Η επίλυση του προβλήματος συνδέεται άμεσα με την υπερβατικότητα του αριθμού π: Αν κάποιος έχει καταφέρει να τετραγωνίσει τον κύκλο, σημαίνει ότι με κάποιο τρόπο έχει υπολογίσει μία συγκεκριμένη αλγεβρική τιμή για το π. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι εφικτό στην περίπτωση που ο αριθμός π είναι υπερβατικός. Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι ένα από τα διασημότερα μαθηματικά προβλήματα.

## 10. Γκριγκόρι Πέρελμαν:

Ο Γκριγκόρι Πέρελμαν είναι Ρώσος μαθηματικός που απέδειξε το 1994 την «εικασία του Πουανκαρέ» και η οποία πριν από τη λύση της θεωρούνταν ως ένα από τα πιο δύσκολα προβλήματα στην τοπολογία. Σύμφωνα με την εικασία του Πουανκαρέ, η τρισδιάστατη σφαίρα είναι η μόνη τρισδιάστατη πολλαπλότητα που στερείται αυτών των περίπλοκων χαρακτηριστικών. Η απόδειξη του Πέρελμαν επιπλέον ταξινόμησε όλα τα είδη των τρισδιάστατων πολλαπλοτήτων που υπάρχουν. Για να αντιληφθεί κανείς πόσο περίπλοκη ήταν η Υπόθεση του Πουανκαρέ, αρκεί να αναφέρουμε ότι ιδιοφυείς μαθηματικοί χρειάστηκε να εργαστούν επί τέσσερα χρόνια για να ελέγξουν την εγκυρότητα της απόδειξης του Πέρελμαν.

## 11. Θεωρία Παιγνίων

 Τα παίγνια είναι μία μέθοδος ανάλυσης προβλημάτων που έχουν σχέση με τον τρόπο λήψης αποφάσεων σε καταστάσεις σύγκρουσης και συνεργασίας. Παίκτης μπορεί να είναι ένα πρόσωπο, μία οργάνωση, ένα κράτος ή ένας συνασπισμός. Ως αντικείμενο έρευνας μπορούν να θεωρηθούν διάφορα προβλήματα πολιτικής, ψυχολογικής, κοινωνικής, οικονομικής μορφής. Για τη λύση των προβλημάτων αυτών θεωρείται προηγουμένως απαραίτητη η ανάλυση καταστάσεων, όπου δύο ή περισσότεροι δρώντες (παίκτες) βρίσκονται αντιμέτωποι και ακολουθούν συνεργατικές στρατηγικές. Κάθε παίκτης προσπαθεί να χρησιμοποιήσει όλα τα μέσα που διαθέτει, για να εμποδίσει τον αντίπαλό του να αποκτήσει πλεονεκτήματα που θα περιορίσουν τα κέρδη του. Επομένως, οι ενέργειές του εξαρτώνται άμεσα από τη θέση (στρατηγική) που θα επιλέξει ο αντίπαλος.

## 12.Θεωρία Γιανκ-Μιλς

Οι νόμοι της κβαντικής Φυσικής είναι για τον κόσμο των στοιχειωδών σωματιδίων ό,τι και οι Νόμοι του Νεύτωνα για τον γύρω μας κόσμο.

Η Κβαντική Θεωρία Γιανγκ - Μιλς αποτελεί σήμερα τη βάση σχεδόν όλων των θεωριών στοιχειωδών σωματιδίων, ενώ οι προβλέψεις της έχουν τύχει πειραματικής μελέτης σε πολλά εργαστήρια. Η μαθηματική της βάση παραμένει, όμως, ασαφής. Η επιτυχημένη χρήση της θεωρίας Γιανγκ - Μιλς για την περιγραφή των ισχυρών αλληλεπιδράσεων στοιχειωδών σωματιδίων εξαρτάται από μιαν ανεπαίσθητη κβαντική μηχανική ιδιότητα, που ονομάζουμε «χάσμα μάζας»: τα κβαντικά σωματίδια έχουν θετική μάζα, παρότι τα κλασικά κύματα μετακινούνται με την ταχύτητα του φωτός

## 13. Εικασία Γκόλντμπαχ

Η εικασία του Γκόλντμπαχ είναι ένα από τα παλιότερα [άλυτα προβλήματα της θεωρίας αριθμών](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%86%CE%BB%CF%85%CF%84%CE%B1_%CF%80%CF%81%CE%BF%CE%B2%CE%BB%CE%AE%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B1_%CF%84%CE%B7%CF%82_%CE%B8%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%CF%82_%CE%B1%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8E%CE%BD) και γενικότερα των [μαθηματικών](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC). Εκφράζεται ως εξής:

Κάθε [άρτιος](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%86%CF%81%CF%84%CE%B9%CE%BF%CE%B9_%CE%BA%CE%B1%CE%B9_%CF%80%CE%B5%CF%81%CE%B9%CF%84%CF%84%CE%BF%CE%AF_%CE%B1%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CE%BF%CE%AF) [θετικός](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%98%CE%B5%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C%CF%82_%CE%B1%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82) [ακέραιος](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CE%BA%CE%AD%CF%81%CE%B1%CE%B9%CE%BF%CF%82_%CE%B1%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82) μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο [πρώτων](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CF%81%CF%8E%CF%84%CE%BF%CF%82_%CE%B1%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82) αριθμών, έτσι ώστε για κάθε n ≧ 2, , όπου p, q πρώτοι αριθμοί.

**Προσπάθειες απόδειξης:**

Όπως με πολλές άλλες εικασίες των μαθηματικών, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός από διαδεδομένες αποδείξεις της εικασίας του Γκόλντμπαχ, από τις οποίες όμως καμία δεν έχει γίνει ακόμα αποδεκτή από την μαθηματική κοινότητα.

Μιά απόδειξη θα μπορούσε να ήταν η εξής: Όλοι οι πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί και όταν προσθέτεις δύο περιττούς αριθμούς το αποτέλεσμα της πράξης είναι άρτιος αριθμός. Έτσι η Υπόθεση-Εικασία νοείται ως αυταπόδεικτη και για τον λόγο αυτό δεν χρήζει απόδειξης!

Δεύτερη Εικασία του Γκόλντμπαχ:

Η δεύτερη εικασία αναφέρει ότι κάθε [περιττός](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%86%CF%81%CF%84%CE%B9%CE%BF%CE%B9_%CE%BA%CE%B1%CE%B9_%CF%80%CE%B5%CF%81%CE%B9%CF%84%CF%84%CE%BF%CE%AF_%CE%B1%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CE%BF%CE%AF) [ακέραιος](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CE%BA%CE%AD%CF%81%CE%B1%CE%B9%CE%BF%CF%82_%CE%B1%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82) αριθμός μεγαλύτερος του 3 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τριών [πρώτων](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CF%81%CF%8E%CF%84%CE%BF%CF%82_%CE%B1%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82).

## 14. Υπόθεση Μπερτς

Οι μαθηματικοί ανέκαθεν ενδιαφέρονταν για το πρόβλημα της ανακάλυψης ακέραιων λύσεων για εξισώσεις του τύπου x2+y2=z2.

Ο Ευκλείδης έδωσε την πλήρη λύση στην εξίσωση αυτή.Πράγματι, το 1970, ο Ματιγιάσεβιτς έδειξε ότι το δέκατο πρόβλημα στον κατάλογο του Χίλμπερτ είναι άλυτο, ότι τέτοιες εξισώσεις έχουν λύσεις σε πλήρεις αριθμούς.

Η Υπόθεση Μπερτς και Σουίνερτον - Ντάιερ αφορά τις λύσεις ορισμένων τέτοιων, ειδικών περιπτώσεων.

## 15. Γρίφος Νας

Ο Κωνσταντίνος Δασκαλάκης κατάφερε να λύσει τον γρίφο του [Τζων Φορμπς Νας](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A4%CE%B6%CF%89%CE%BD_%CE%A6%CE%BF%CF%81%CE%BC%CF%80%CF%82_%CE%9D%CE%B1%CF%82) που απασχολούσε τους επιστήμονες της πληροφορικής για 60 χρόνια. Ο Νας, στο πεδίο της [θεωρίας των παιγνίων](http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1_%CF%80%CE%B1%CE%B9%CE%B3%CE%BD%CE%AF%CF%89%CE%BD), είχε δημιουργήσει ένα απλοποιημένο σύστημα των σχέσεων και των ενεργειών κάποιων ανθρώπων που βρίσκονταν σε καταστάσεις με διαφορετικά συμφέροντα, όπως το να είναι αντίπαλοι σε ένα παιχνίδι.

Ισχυρίστηκε ότι σε κάθε αγορά, ακόμη και όταν υπάρχουν αντικρουόμενα συμφέροντα, υπάρχει τρόπος να βρεθεί η ισορροπία. Ο Δασκαλάκης, όμως, απέδειξε ότι οι μέχρι τότε προσπάθειες στρέφονταν προς λάθος κατεύθυνση. Έδειξε δηλαδή ότι η ισορροπία αυτή, σε ορισμένες περιπτώσεις, είναι υπολογιστικά αδύνατη.Για αυτή του την απόδειξη βραβεύθηκε από τον διεθνή οργανισμό ΑCΜ  το [2008](http://el.wikipedia.org/wiki/2008).

## 16.Εικασία Χοτζ

Η εικασία του Hodge ισχυρίζεται ότι για μερικούς ιδιαίτερης μαθηματικής κομψότητας χώρους, που λέγονται προβολικές αλγεβρικές κλάσεις, τα κομμάτια που χρειάζονται να συγκολληθούν και αποκαλούνται κύκλοι Hodge

είναι ρητοί γραμμικοί συνδυασμοί κομματιών που έχουν γεωμετρική σημασία και λέγονται αλγεβρικοί κύκλοι.

Παραμένει άλυτη 70 χρόνια.

##